ENAC

2013

ANNALES

Concours Interne pour le recrutement d'Ingénieur des Etudes et de l'Exploitation de l'Aviation Civile

SESSION 2013

ENAC

La référence aéronautique

www.enac.fr

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **SESSION 2013**

CONCOURS INTERNE DE RECRUTEMENT D'INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE

(I.E.E.A.C.)

FRANÇAIS

(EPREUVE OBLIGATOIRE)

Durée : **3 H**

Coefficient : **3**

Ce sujet comporte :

1 page de garde
1 page de sujet

CALCULATRICE NON AUTORISEE

IEEAC Interne 2013

sujet

« On dit avec raison que le développement harmonieux de toutes les facultés de l'homme est ce qu'il faut désirer, et que c'est là la perfection ; oui, mais l'homme n'en est pas capable, et il doit se considérer et se développer comme un fragment d'être, en cherchant seulement à bien concevoir ce que sont tous les hommes réunis »

Quelles réflexions vous suggèrent cette opinion de Goethe ? Vous commenterez et discuterez cette opinion.

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **SESSION 2013**

CONCOURS INTERNE DE RECRUTEMENT D'INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE

(I.E.E.A.C.)

MATHEMATIQUES

(EPREUVE OBLIGATOIRE)

Durée : **4 H**

Coefficient : **4**

Ce sujet comporte :

1 page de garde
5 pages de sujet numérotées de 1 à 4

CALCULATRICE NON AUTORISEE

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE – SESSION 2013

CONCOURS INTERNE DE RECRUTEMENT D'INGÉNIEURS
DES ÉTUDES ET DE L'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE

(I.E.E.A.C.)

Epreuve obligatoire de Mathématiques
Durée : 4 heures

Calculatrices autorisées

L'énoncé comporte 5 pages

PROBLÈME 1 : ANALYSE

Première partie

On considère les applications u et v de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$u(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(tx)\,dt \quad \text{et} \quad v(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(tx)\,dt\,.$$

1) Premières propriétés des applications u et v.

a) Prouver que u et v sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter (sous forme intégrale) leurs dérivées.

c) Que dire de la parité des fonctions u et v ?

2) En justifiant les intégrations par parties effectuées, établir que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$u(x)=2v'(x)-2x\,u'(x) \quad \text{et} \quad v(x)=-2\,u'(x)-2x\,v'(x).$$

3) En déduire que u et v sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Deuxième partie

4) Pour $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, justifier la convergence de l'intégrale $I(\lambda)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}}\sin(t)\,dt$.

5) Pour $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$a_n(\lambda)=(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}}\sin(t)\,dt \quad \text{et} \quad S_n(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k(\lambda).$$

a) Etablir que la suite $(S_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et exprimer sa limite.

b) Montrer que la suite $(a_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et converge vers 0.

c) En déduire que la suite $(S_{2p+1}(\lambda))_{p\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante puis que $I(\lambda)>0$.

6) Etablir que pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, $v(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}I(\frac{1}{x})$ puis que $v(x)>0$.

Troisième partie

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$r(x) = \sqrt{u(x)^2 + v(x)^2} \quad \text{et} \quad \theta(x) = \text{Arctan}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right].$$

7) Expressions analytiques de r et θ.

a) A l'aide des égalités obtenues à la question 2, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$r'(x) + \frac{x}{2(1+x^2)} r(x) = 0.$$

b) Montrer aussi que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta'(x) = \dfrac{-1}{2(1+x^2)}$.

c) En déduire les expressions analytiques des fonctions r et θ. Le résultat fera intervenir la constante $c_0 = u(0)$ que l'on ne cherchera pas à calculer pour l'instant.

8) En déduire, en fonction de c_0, les expressions $u(x)$ et $v(x)$ d'abord pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, puis pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser, sans les justifier, les égalités suivantes valables pour tout réel α :

$$\cos(\text{Arctan}\,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\text{Arctan}\,\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Quatrième partie

9) Montrer que $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{A^2}{\cos^2\theta}\right) d\theta = 0$.

10) Pour $A \in \mathbb{R}_+^*$, on note $K = [0, A] \times [0, A]$, et on considère l'intégrale :

$$J(A) = \iint_K e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

a) Montrer que $J(A) = 2\iint_{K_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ où on a posé : $K_1 = \{(x, y) \in K : x \geq y\}$.

Exprimer alors $J(A)$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{A^2}{\cos^2\theta}\right) d\theta$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ puis en déduire la valeur de c_0.

PROBLÈME 2 : ALGÈBRE

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Etant donné un endomorphisme u de E, on appelle *racine carrée de u* tout endomorphisme v de E tel que $v^2 = u$ (où, bien sûr, on a posé $v^2 = v \circ v$). On note $\mathrm{Rac}(u)$ l'ensemble des racines carrées de u, soit :

$$\mathrm{Rac}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v^2 = u\}.$$

De la même manière, étant donné une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *racine carrée de A* toute matrice carrée $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. On note alors $\mathrm{Rac}(A)$ l'ensemble des racines carrées de A, soit :

$$\mathrm{Rac}(A) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid R^2 = A\}.$$

L'objet de ce problème est de déterminer, sur quelques exemples, l'ensemble $\mathrm{Rac}(A)$.

Première partie

1) Premier exemple.

Soit R une racine carrée de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Montrer que $RA = AR$. En déduire que R est triangulaire supérieure.

c) Déterminer $\mathrm{Rac}(A)$.

2) Racines carrées de la matrice nulle.

Soit v un endomorphisme de E qui est une racine carrée de l'endomorphisme nul de E (noté 0). On désigne par r le rang de v.

a) Montrer que $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, v$. En déduire que $r \leq \frac{n}{2}$.

b) On suppose que $v \neq 0$ et donc que $r \geq 1$. On note $(e_1, e_2, ..., e_r)$ une base de $\mathrm{Im}\, v$ que l'on complète avec des vecteurs $e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_{n-r}$ de manière à obtenir une base de $\mathrm{Ker}\, v$. Enfin, on note $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ des vecteurs de E tels que $v(\varepsilon_i) = e_i$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., r\}$. Montrer que la famille $B = (e_1, e_2, ..., e_{n-r}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_r)$ est une base de E puis écrire la matrice M_r de v dans B.

c) A l'aide des matrices M_r et de matrices inversibles, déterminer les racines carrées de la matrice nulle.

3) Soit v un endomorphisme de E tel qu'il existe un entier $p \geq 2$ vérifiant $v^p = 0$ et $v^{p-1} \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x, v(x), v^2(x), ..., v^{p-1}(x))$ soit libre. En déduire que $p \leq n$ puis que $v^n = 0$.

b) Application : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3. En déduire que l'ensemble $\mathrm{Rac}(A)$ est vide.

4) **Racines carrées de la matrice I_n.**

Soit v un endomorphisme de E qui est une racine carrée de l'endomorphisme identité de E (noté Id_E).

a) Quelle est la nature de v ? En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de v est diagonale. Que valent les coefficients diagonaux ?

b) Déterminer $\mathrm{Rac}(I_n)$ [On utilisera les réels $\varepsilon_i \in \{-1,+1\}$ pour $i \in \{1,2,...,n\}$].

5) Soient λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le spectre est $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$.

a) Justifier l'existence d'une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice diagonale définie par :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

b) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec D (c'est-à-dire $MD = DM$) alors M est une matrice diagonale.

c) Soit R une racine carrée de A. Montrer alors que $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D puis établir que S est de la forme :

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s_n \end{pmatrix}$$

d) Que vaut s_i^2 pour $i \in \{1,2,...,n\}$? Que peut-on dire de $\mathrm{Rac}(A)$ si l'une des valeurs propres de A est strictement négative ?

e) On suppose que toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles. Expliciter l'ensemble $\mathrm{Rac}(A)$ [On utilisera les réels $\varepsilon_i \in \{-1,+1\}$ pour $i \in \{1,2,...,n\}$]. Combien de racines carrées la matrice A admet-elle [On distinguera les cas $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 > 0$] ?

f) Application. Expliciter les éléments de $\mathrm{Rac}(A)$ lorsque $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

Deuxième partie

6) **Racines carrées de la matrice $-I_n$.**

a) Montrer que si n est impair, $\mathrm{Rac}(-I_n) = \varnothing$. [Indication : penser au déterminant.]

b) On suppose que n est pair. Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une racine carrée de $-I_n$. Montrer que R est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ [On pourra considérer la matrice iR]. Quelles sont les valeurs propres possibles pour R ? En déduire que la trace de R est un complexe de partie réelle nulle. Etablir finalement que $\mathrm{tr}(R) = 0$.
En déduire que le déterminant de R est égal à 1.

L'objet des questions suivantes est de déterminer l'ensemble $\text{Rac}(-I_4) \cap O(4)$ constitué des racines carrées de $-I_4$ qui sont aussi des matrices orthogonales. Dans toute la suite, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique et de la norme associée. On dit qu'un endomorphisme v de E est un *quart de tour* si, et seulement si, il satisfait les deux conditions suivantes :

(1) v est une racine carrée de $-Id_E$,

(2) v est une isométrie vectorielle de E.

7) Soit v un quart de tour de E.

a) Montrer que l'image par v d'un vecteur $x \in E$ est un vecteur orthogonal à x.

b) On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E stable par v. Montrer que $F^\perp$ est stable par v.

8) On note v_0 l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice M_0 définie par :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que v_0 est un quart de tour.

9) Soient v un quart de tour de E et a un vecteur unitaire de E.

a) Montrer que le plan P engendré par la famille $(a, v(a))$ est invariant par v. Quel est la nature géométrique de la restriction de v à P ?

b) Soit b un vecteur unitaire de E appartenant à $P^\perp$. Montrer que la famille $(a, v(a), b, v(b))$ est une base orthonormée de E. Quelle est la matrice de v dans cette base ?

10) Conclure.

FIN

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **SESSION 2013**

CONCOURS INTERNE DE RECRUTEMENT D'INGENIEURS DES ETUDES ET D'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE.

(I.E.E.A.C.)

PHYSIQUE

(EPREUVE OBLIGATOIRE)

Durée 3 H
Coefficient : 3

Ce sujet comporte :

2 pages de garde

7 pages de sujet numérotées de 3 à 10

1 document réponse (Page 11)

CALCULATRICE INTERDITE

AVERTISSEMENT

L'utilisation des calculatrices est INTERDITE.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs et à soigner le tracé du diagramme en thermodynamique.

L'épreuve comporte trois problèmes indépendants ayant des parties indépendantes.

Le problème I traite d'un freinage par ***phénomène d'induction****.*

Le problème II porte sur ***le traitement de signal****.*

Le problème III aborde l'étude ***d'une climatisation*** *en thermodynamique.*

PROBLEME 1 : LUGE D'ETE

Sur des pistes de luge d'été, où le conducteur peut adapter individuellement la vitesse de la luge en actionnant un frein mécanique, il peut arriver qu'une luge allant plus vite percute une luge qui avance moins vite. Cela se produit souvent dans la zone de sortie de piste.

L'objectif de la présente invention est d'installer à cet endroit une zone de freinage présentant des dispositifs de freinage qui fonctionnent en fonction de la vitesse, de façon à ce que des luges à faible vitesse ne soient pas ou peu soumises à un freinage, alors que des luges à vitesse élevée soient soumises à un freinage jusqu'à atteindre la vitesse prévue.

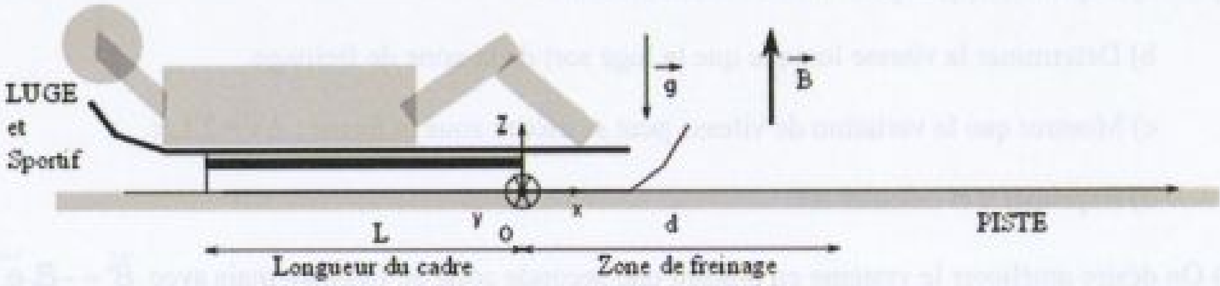


Figure 1

On fixe sous la luge un cadre métallique conducteur de longueur L de largeur a, présentant une résistance totale R et d'inductance propre négligeable.

Pour une étude préalable, on suppose que dans la zone de freinage horizontale, le champ magnétique est uniforme sur une longueur d de la piste et vaut $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ avec $B_0 = 1$T.

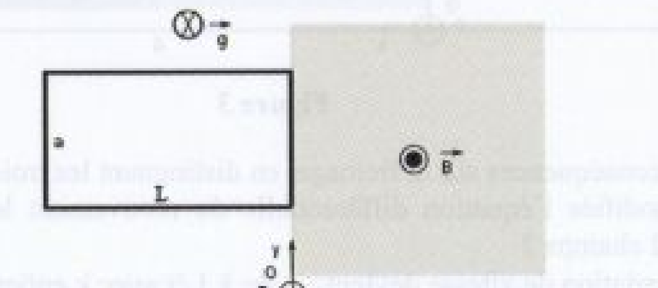


Figure 2

La luge et son passager (formant un système de masse m) arrivent en fin de descente à la vitesse $\vec{V}(t=0) = V_0 \vec{e}_x$ avec $V_0 = 20$ m s^{-1}

On supposera dans un premier temps que $d > L$.

On notera : Phase 1 l'entrée de la luge dans la zone de freinage.

Phase 2 la luge est entièrement dans la zone

Phase 3 la luge sort de la zone.

1°) Décrire **qualitativement** ce qui se passe pendant les différentes phases du mouvement. Préciser le sens du courant induit (ou son algébrisation). Le sens des forces en présence et leurs effets.

2°) Etablir le système d'équations différentielles reliant la vitesse $v(t)$ de la luge et $i(t)$ courant dans le circuit lors des 3 phases.

3°) a) Déterminer l'évolution de la vitesse $v(t)$.

b) Tracer l'allure de $v(t)$ dans le cas $d>L$.

c) Avec la même échelle : Tracer l'allure de v(t) dans le cas ou d<L.

d) Comment choisir d afin d'optimiser la zone de freinage ?

Par la suite on se placera dans ce cas.

4°) a) Exprimer x(t), la position de l'avant du cadre.

b) Déterminer la vitesse lorsque que la luge sort de la zone de freinage.

c) Montrer que la variation de vitesse peut se mettre sous la forme : $\Delta V = 2\ L/\tau$.

d) Exprimer τ et calculer ΔV.

5°) On désire améliorer le système en plaçant une seconde zone de freinage mais avec $\vec{B'} = -B_0 \vec{e_z}$.
On se place toujours dans le cas le plus favorable pour d.

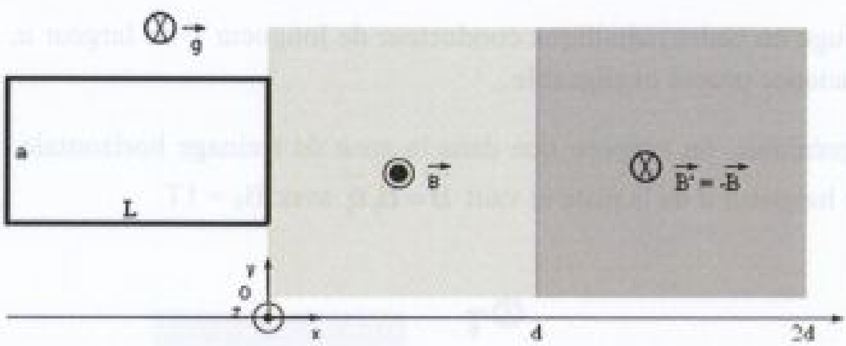


Figure 3

a) Quelles sont les conséquences sur le freinage, en distinguant les trois phases ?
b) Comment est modifiée l'équation différentielle du mouvement lorsque le cadre est entièrement plongé dans les 2 champs ?
c) Montrer que la variation de vitesse devient : $\Delta V = k\ L/\tau$ avec k entier.

6°) On juxtapose N zones de freinage de champs magnétiques alternés.

a) Justifier que la variation de vitesse s'écrive : $\Delta V = (4\ (N-1)+2)\ L/\tau$.
b) Combien doit-on disposer de zones afin d'arriver à une vitesse finale de 1 $m.s^{-1}$ (sans jouer sur le frein mécanique) ?
c) Quelle est alors la longueur de la piste d'arrêt ?

On donne m = 100 kg, a = 50 cm, L = 100 cm, R=0,05Ω.

PROBLEME 2 : TRAITEMENT DE SIGNAUX

I Généralités

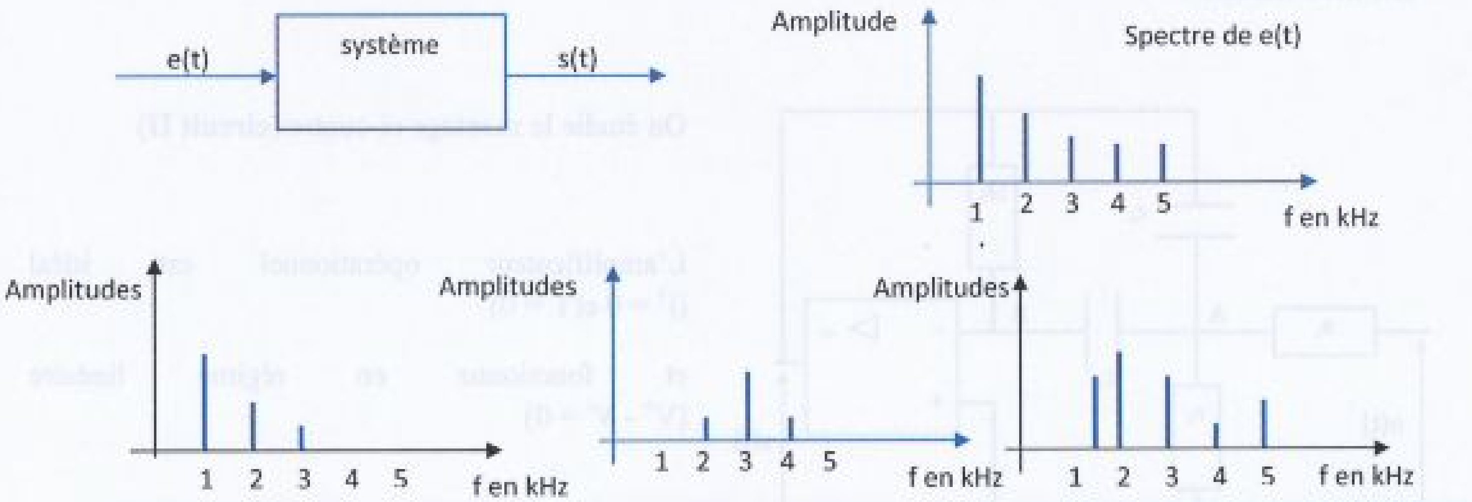
1°) Soit un système physique qui à une grandeur d'entrée fonction du temps e(t) fait correspondre une grandeur de sortie fonction du temps s(t). A quelle condition ce système peut-il être dit linéaire ?

2°) On étudie expérimentalement la fonction de transfert de plusieurs systèmes (système 1, système 2, système 3) à l'aide d'un analyseur de spectre numérique ; pour cela on applique à leur entrée le même signal e(t). On donne ci-dessous les spectres de Fourier du signal e(t) et ceux des signaux obtenus en sortie des trois systèmes.

a) Qu'appelle-t-on spectre de Fourier d'un signal périodique s(t) ?

b) Le système 1 est-il linéaire ? Quel est son rôle ?

c) Qu'en est-il des systèmes 2 et 3 ?



Système 1: spectre de s(t) | Système 2: spectre de s(t) | Système 3: spectre de s(t)

3°) Impédance complexe

On utilise des dipôles linéaires en régime sinusoïdal.

On note $u(t) = U\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi_u)$ la tension aux bornes du dipôle et $i(t) = I\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi_i)$ l'intensité du courant qui traverse le dipôle, u(t) et i(t) seront définis en convention récepteur.

À chaque grandeur temporelle $x(t) = X\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi_x)$, on associe le complexe suivant : $\underline{x}(t) = X\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi_x)}$. On peut aussi utiliser l'amplitude complexe $\underline{X} = X\sqrt{2}e^{(j\varphi_x)}$.

a) Que représentent les grandeurs U, ω et φ_u ? Peut-on les mesurer et comment ?

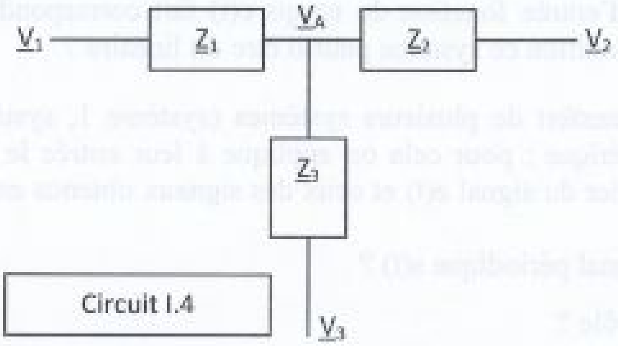
b) Etablir l'expression de l'impédance $\underline{Z}$ complexe associée à chacun des dipôles idéaux suivants:

- résistance "pure"   - capacité "pure"   - inductance "pure"

c) On mesure pour un dipôle linéaire particulier: $\underline{Z} = A + j.B$; A = 1 kΩ et B = 1 kΩ.

Calculer i(t) si $u(t) = 10\sqrt{2}.\cos(\omega t)$ avec u(t) en volts.

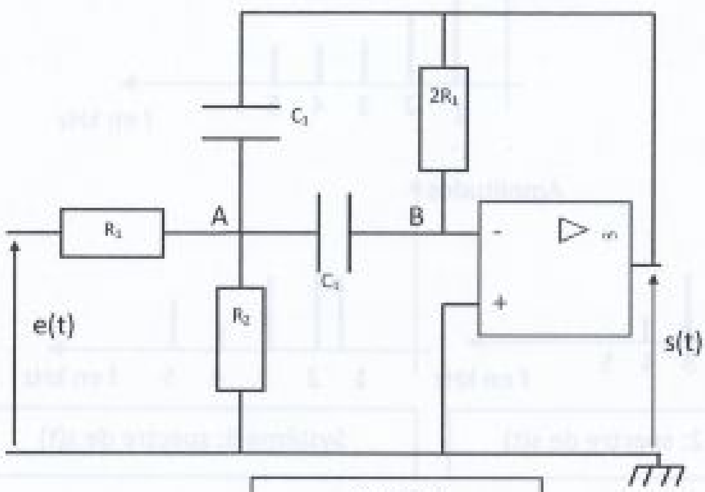
4°) Théorème de Millman



Circuit I.4

Calculer l'amplitude complexe $\underline{V}_A$ du potentiel au nœud A dans le **circuit I.4** en fonction des admittances $\underline{Y}_i = \dfrac{1}{\underline{Z}_i}$ et des amplitudes complexes $\underline{V}_i$ des potentiels des extrémités des branches.

II Filtre sélectif



Circuit II

On étudie le montage ci-contre:**(circuit II)**

L'amplificateur opérationnel est idéal ($i^+ = 0$ et $i^- = 0$)

et fonctionne en régime linéaire ($V^+ - V^- = 0$)

1°) Fonction de transfert

On impose à l'entrée une tension e(t) sinusoïdale de pulsation ω.

a) On définit le transfert en tension $\underline{T}(\omega)=\underline{s}(t)/\underline{e}(t)$. Montrer que le transfert en tension ne dépend pas du temps. En étudiant le circuit en hautes et basses pulsations déterminer la nature du circuit. On pourra faire deux schémas que l'on interprétera.

b) Établir le système de 2 équations vérifiées par $\underline{V}_A$, $\underline{V}_B$, $\underline{S}$ en fonction de $\underline{E}$ et des éléments du montage.

c) Montrer que l'on peut mettre $\underline{T}(\omega)$ sous la forme $\underline{T}(\omega) = \dfrac{-1}{1 + j\left(R_1 C_1 \omega - \dfrac{1}{R_e C_1 \omega}\right)}$ avec

$$R_e = \frac{2R_1.R_2}{R_1 + R_2}$$

d) Mettre $\underline{T}(\omega)$ sous la forme canonique $\underline{T}(\omega) = \dfrac{-1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$ et identifier Q et ω_0 en fonction de R_1, R_2 et C_1.

e) Calculer les valeurs à donner à R_1 et C_1 avec 2 chiffres significatifs pour avoir $f_0 = 3{,}0$ kHz et le facteur de qualité Q=20 avec $R_2 = 0{,}20\ \text{k}\Omega$. Donnée : Pi=3.1, 1/150 = 0.0066.

2°) Etude du gain.

On étudie $T(\omega) = \left|\underline{T}(\omega)\right|$,

a) Montrer que $T(\omega)$ passe par un maximum pour une valeur de ω que l'on exprimera.
b) Déterminer les équations des deux asymptotes.
c) Tracer le diagramme de Bode asymptotique en gain et donner l'allure du diagramme réel.
d) Définir, puis calculer les pulsations de coupure à - 3 dB en fonction de ω_0 et Q.
e) En déduire la bande passante du filtre B_ω et calculer sa valeur
f) Déduire de ce qui précède une interprétation possible du facteur de qualité Q.

3°) Etude de la phase.

a) Déterminer les expressions de la phase pour les deux asymptotes
b) Quelle est la phase pour les deux pulsations de coupure ?
c) Tracer le diagramme asymptotique de Bode en phase et placer le diagramme réel le plus précisément.
d) Déduire de ce qui précède une interprétation possible du facteur de qualité Q.

4°) Analyseur de Fourier élémentaire.

On met à l'entrée de ce circuit II le signal e(t) représenté ci-contre (**figure II.4**).

avec f =1/T= 3,0 kHz et E = 10 V.

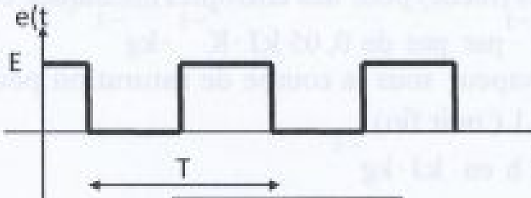


figure II.4

On montre que l'on peut décomposer le signal e(t) en une combinaison linéaire de sinusoïdes sous la forme : $e(t) = E\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\cos(2\pi f \cdot t) + \dfrac{2}{3\pi}\cos(2\pi 3 f \cdot t) + \dfrac{2}{5\pi}\cos(2\pi 5 f \cdot t)...\right)$

a) Comment s'appellent les diverses fréquences qui apparaissent dans l'expression de e(t) ?

b) Tracer l'allure du signal de sortie s(t) si le circuit II est réglé pour $f_0 = 3{,}0$ kHz et Q = 20.

c) Comment pourrait-on utiliser le circuit II pour déterminer le spectre en fréquence de e(t) ?

PROBLEME 3 : CLIMATISATION

La quasi-totalité des véhicules neufs sont aujourd'hui équipés d'une climatisation. Pour refroidir l'air intérieur du véhicule, un fluide frigorigène, l'hydrofluorocarbone HFC connu sous le code R134a, effectue en continu des transferts énergétiques entre l'intérieur, l'extérieur du véhicule et le compresseur.

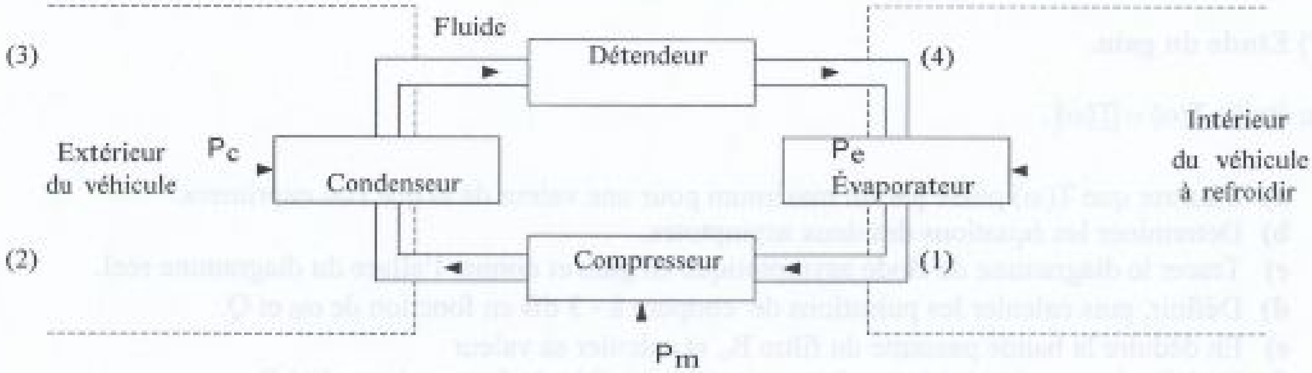


Figure 5 – Structure de la climatisation

1°) Les chlorofluorocarbures ou CFC comme le fréon, sont des fluides frigorigènes qui ont été très longtemps utilisés. Pourquoi ces fluides ne sont-ils plus utilisés aujourd'hui ?

Sur le diagramme enthalpique (p, h) (figure 6) de l'hydrofluorocarbone HFC, de masse molaire $M = 30\ g \cdot mol^{-1}$ sont représentés :

- la courbe de saturation de l'équilibre liquide-vapeur de l'hydrofluorocarbone HFC (en trait fort noir)
- les isothermes (rouge) pour des températures comprises entre −40 °C et 160 °C par pas de 10 °C
- les isentropiques (bleue) pour des entropies massiques comprises entre $1,70\ kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$ et $2,25\ kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$ par pas de $0,05\ kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$
- les isotitres en vapeur sous la courbe de saturation pour des titres massiques en vapeur x_V variant de 0 à 1 par pas de 0,1 (noir fin)
- P est en bar et h en $kJ \cdot kg^{-1}$

2°) Indiquer sur le diagramme (document réponse) les domaines liquide, vapeur, équilibre liquide- vapeur du fluide.

3°) Dans quel domaine du diagramme le fluide à l'état gazeux peut-il être considéré comme un gaz parfait ?

On étudie dans la suite l'évolution du fluide au cours d'un cycle en régime permanent. Le débit massique est $\boldsymbol{D_m = 0,1\ kg \cdot s^{-1}}$

On rappelle l'expression du premier principe appliqué à un système ouvert (ex : le compresseur) en régime permanent :

$$D_m .(h_s - h_e) = P_m + P_{th}$$

où :

- D_m le débit massique de fluide entrant ou sortant du système ouvert,
- P_m la puissance mécanique algébriquement reçue de l'extérieur par le fluide en mouvement au niveau des parties mobiles du système ouvert,
- P_{th} la puissance thermique algébriquement reçue de l'extérieur par le fluide en mouvement à travers la paroi entourant le système ouvert,
- h_s et h_e l'enthalpie massique du fluide respectivement en entrée et en sortie du système ouvert
- La puissance thermique P_e reçue par le fluide dans l'évaporateur permet la vaporisation isobare complète du fluide venant de (4) et conduit à de la vapeur à température $T_1 = 5\ °C$ et pression $p_1 = 3$ bar : point (1).

4°) Placer le point (1) sur le diagramme (document réponse Noir et blanc). Relever la valeur de l'enthalpie massique h_1 et de l'entropie massique s_1 du fluide au point (1).

Le compresseur aspire la vapeur (1) et la comprime de façon isentropique avec un taux de compression $r = p_2 / p_1 = 6$.

5°) Déterminer p_2. Placer le point (2) sur le diagramme (document réponse). Relever la valeur de la température T_2 et celle de l'enthalpie massique h_2 en sortie du compresseur.

6°) Déterminer la valeur de la puissance P_m du travail mécanique reçu par le fluide lors de son passage dans le compresseur. Commenter le signe de P_m.

Le fluide sortant du compresseur entre dans le condenseur dans lequel il est refroidi de manière isobare jusqu'à saturation totale : point (3).

7°) Placer le point (3) sur le diagramme (document réponse). Relever la valeur de la température T_3 de l'enthalpie massique h_3 en sortie du condenseur.

Le fluide sortant du condenseur est détendu dans le détendeur supposé adiabatique jusqu'à la pression de l'évaporateur p_1 : point (4).

8°) Montrer que la transformation dans le détendeur est isenthalpique.

9°) Placer le point (4) sur le diagramme (document réponse) et tracer le cycle complet. Relever la valeur de la température T_4 et le titre massique en vapeur x_4 en sortie du détendeur.

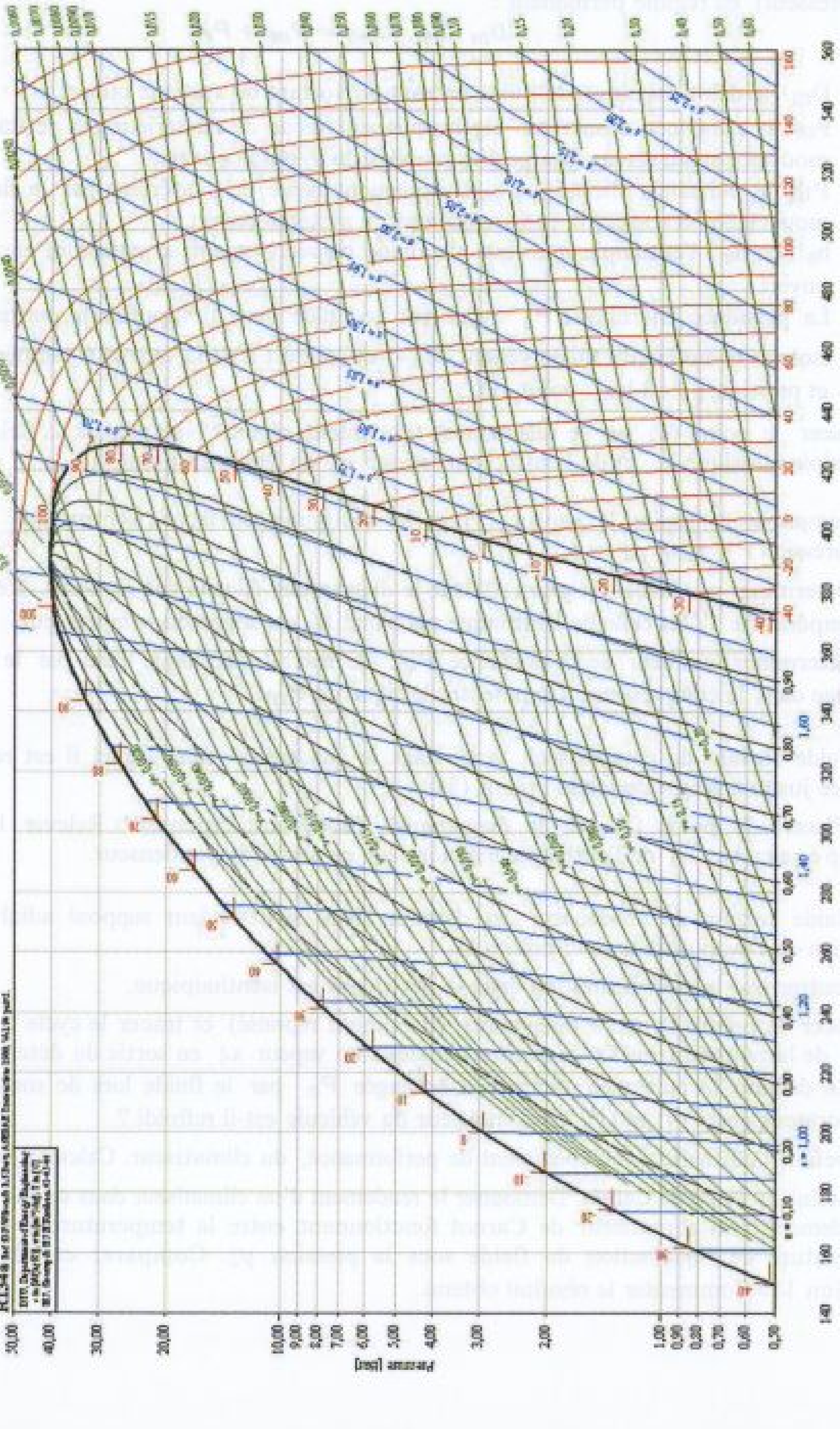
10°) En déduire la puissance thermique échangée P_e par le fluide lors de son passage à travers l'évaporateur entre (4) et (1). L'air intérieur du véhicule est-il refroidi ?

11°) Définir l'efficacité e, ou coefficient de performance, du climatiseur. Calculer sa valeur.

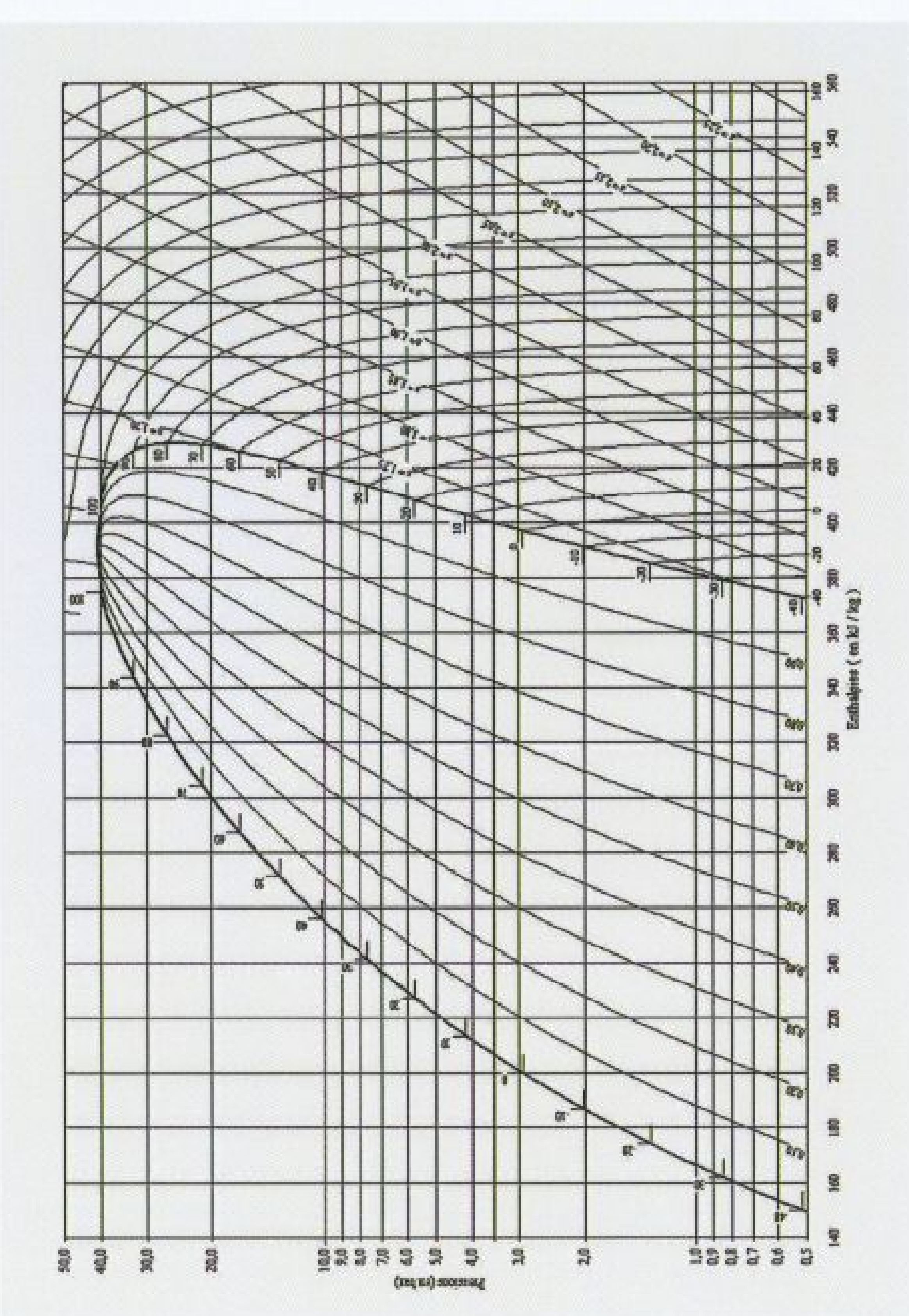
12°) Définir le cycle de Carnot. Démontrer le rendement d'un climatiseur dans ce cas de figure. Calculer le rendement d'un climatiseur de Carnot fonctionnant entre la température de l'évaporateur et la température de liquéfaction du fluide sous la pression p_2. Comparer ce résultat à celui de question 11. Commenter le résultat obtenu.

FIN.

Figure 6 – Diagramme enthalpique de l'hydrofluorocarbone HFC - R134a



NUMERO DU CANDIDAT :



DOCUMENT REPONSE

Ecole Nationale de l'Aviation Civile
7 avenue Edouard Belin
CS 54005
31055 Toulouse cedex 4
Tél. + 33 (0) 5 62 17 40 00

La référence aéronautique

www.enac.fr