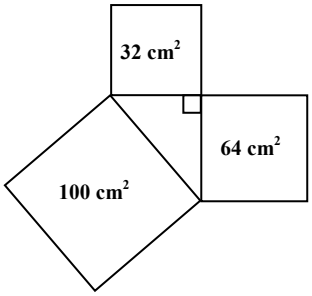
Mathématiques

Première partie de l'épreuve

EXERCICE 1 (5 points)

Dans cet exercice, des affirmations sont proposées. Pour chacune d'entre elles, dire si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.
Une réponse fausse n'enlève aucun point.

1. La figure ci-contre représente trois carrés construits sur les trois côtés d'un triangle rectangle. Dans chacun des carrés est indiquée son aire.



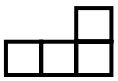
Affirmation 1 :
La construction à l'échelle de cette figure est possible.

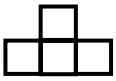
2. **Affirmation 2 :**
Si un nombre est multiple de 6 et de 9, alors il est aussi multiple de 54.

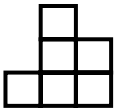
3. On considère deux nombres dont la somme est 400.
Affirmation 3 :
Si l'on augmente de 3 chacun de ces deux nombres alors leur produit augmente de 1209.

4. En période de sécheresse, un agriculteur a des réserves pour alimenter ses 8 vaches pendant 20 jours. Il accepte de prendre en charge 2 vaches de plus pour rendre service à son voisin.
Affirmation 4 :
Avec ces mêmes réserves, il pourra nourrir toutes les vaches pendant 18 jours.

5. On considère un solide constitué d'un empilement de cubes identiques.
On voit ci-contre les vues de droite, de face et de dessus.
Affirmation 5 :
On peut construire un tel solide à l'aide d'un empilement de 7 cubes.


Vue de droite


Vue de face


Vue de dessus

6. **Affirmation 6 :**
En insérant de différentes manières exactement deux parenthèses (une ouvrante et une fermante) dans l'écriture $8 \times 7 + 3 \times 5$, on peut obtenir tous les nombres de la liste suivante :

71 ; 176 ; 283 ; 295 ; 400.

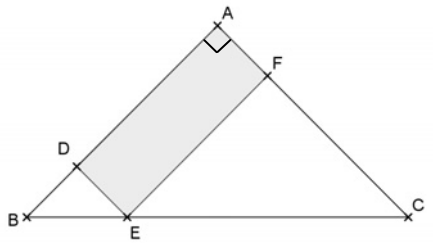
EXERCICE 2 (5 points)

Soit ABC un triangle isocèle, rectangle en A, tel que AB = 1 m.
On cherche à inscrire dans ce triangle un rectangle ayant une aire maximale.
Dans tout ce problème, l'unité de longueur est le mètre.

Partie A :

Dans cette partie, on inscrit le rectangle AFED comme sur la figure ci-contre.

- F est un point du segment [AC],
- D est un point du segment [AB],
- E est un point du segment [BC].



On pose AD = x et on considère la fonction f qui, à tout nombre x compris entre 0 et 1, associe l'aire du rectangle ADEF.

1. Montrer que : $f(x) = -x^2 + x$.

2. À l'aide d'une feuille de calcul, on a construit un tableau de valeurs de la fonction f.

	A	B
1	*x*	*f(x)*
2	0	0
3	0,1	0,09
4	0,2	0,16
5	0,3	0,21
6	0,4	0,24
7	0,5	0,25
8	0,6	0,24
9	0,7	0,21
10	0,8	0,16
11	0,9	0,09
12	1	0

a) Quelle formule a-t-on pu entrer dans la cellule B2, puis recopier jusqu'en B12, pour générer les images par f ?

b) Dans cette question, on admet l'existence d'un maximum pour la fonction f. Peut-on affirmer, à l'aide du tableau, que le maximum de la fonction f est atteint en $\frac{1}{2}$?

3. a) Démontrer que : $f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$.

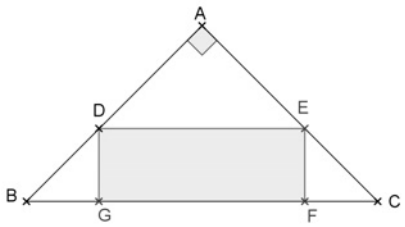
b) En déduire l'aire maximale recherchée.

c) Le rectangle d'aire maximale est-il un carré ?

Partie B :

Dans cette partie, on inscrit le rectangle DEFG comme sur la figure ci-contre.

- D est un point du segment [AB],
- E est un point du segment [AC],
- G et F sont deux points du segment [BC].



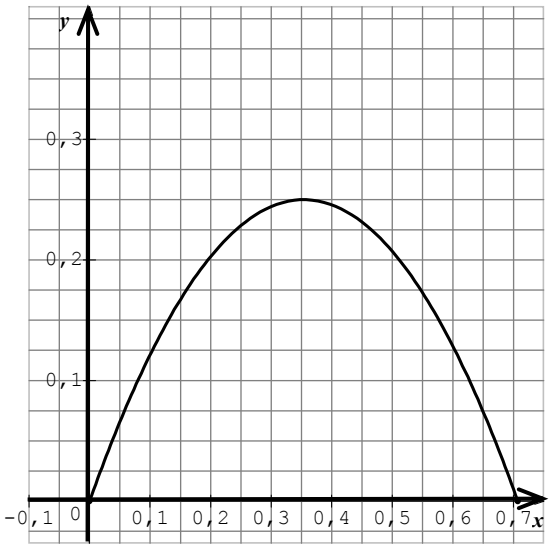
On pose BG = x.

1. Dans quel intervalle I se trouve le nombre x ?

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction g qui, à tout nombre x dans l'intervalle I, associe l'aire du rectangle DEFG.

2. Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

3. La représentation graphique de g est donnée ci-dessous :



a) D'après le graphique, où placer le point G pour inscrire un rectangle d'aire 0,2 m² ?

b) Par lecture graphique, déterminer l'aire maximale recherchée au centième près.

c) Pour cette aire, le quadrilatère DEFG est-il un carré ?

EXERCICE 3 (2 points)

Soit n un nombre entier naturel non nul et A_n le nombre entier naturel dont l'écriture décimale ne contient que le chiffre 1 répété n fois : $A_n = \underbrace{111...1}_{n \text{ fois}}$

1. Pour quelles valeurs de n le nombre A_n est-il divisible par 11 ? Justifier.

2. Pour quelles valeurs de n le nombre A_n est-il divisible par 33 ? Justifier.

CORRECTION

EXERCICE 1. (5 points)

1.	**Affirmation fausse** Si la construction à l'échelle de la figure était possible alors, d'après le théorème de Pythagore, l'aire du grand carré serait égale à la somme des deux autres aires. Or 32 + 64 $\neq$ 100. L'affirmation est donc fausse.
2.	**Affirmation fausse** Contre-exemple : 18 est un multiple de 6 et de 9 mais pas de 54.
3.	**Affirmation vraie** $(x+3)(y+3) = xy+3x+3y+9$ $= xy+3(x+y)+9$ $= xy+3\times 400+9$ $= xy+1209$
4.	**Affirmation fausse** Si 8 vaches sont nourries pendant 20 jours alors, avec les mêmes réserves, 40 vaches seront nourries pendant 4 jours. Donc, 10 vaches seront nourries pendant 16 jours. D'autres raisonnements sont possibles, par exemple, un raisonnement algébrique faisant intervenir la ration journalière d'une vache.
5.	**Affirmation vraie** La vue de dessus indique qu'on peut mettre 6 cubes au 1er niveau. La vue de face montre qu'il y a un 2ème niveau seulement pour la rangée centrale et celle de droite montre que cette rangée centrale comporte un cube, en dernière position. Par conséquent, on peut construire un tel solide avec 7 cubes.
6.	**Affirmation fausse** On liste tous les cas possibles et on n'obtient pas 283. $(8 \times 7) + 3 \times 5 = 71$ $\quad$ $8 \times (7 + 3) \times 5 = 400$ $8 \times 7 + (3 \times 5) = 71$ $\quad$ $(8 \times 7 + 3) \times 5 = 295$ $8 \times (7 + 3 \times 5) = 176$ $\quad$ $(8 \times 7 + 3 \times 5) = 71$

EXERCICE 2. (5 points)

A.1.	ADEF est un rectangle donc $\widehat{BDE}$ est droit. ABC est un triangle rectangle isocèle donc $\widehat{DBE}$ = 45° Il en résulte que le triangle BDE est rectangle isocèle et DE = BD = 1 – x. $f(x) = x(1 - x) = -x^2 + x$ Autres méthodes : théorème de Thalès ou trigonométrie

A.2.a.	$\boxed{= - A2 * A2 + A2}$
A.2.b.	La seule lecture du tableau ne permet pas de connaître les images des nombres autres que les décimaux à une décimale, donc on ne peut pas affirmer que le maximum est atteint en 1/2 .
A.3.a.	$-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=-x^2+x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=-x^2+x=f(x)$
A.3.b.	Le nombre $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ est négatif donc le maximum de f (x) est atteint quand ce nombre est nul, c'est-à-dire quand x = 1/2. L'aire maximale est donc 0,25 m².
A.3.c	DE = 1/2. Le rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur ; c'est donc un carré.
B.1.	Par Pythagore, BC = $\sqrt{2}$ donc I = $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
B.2.	EDGF est un rectangle donc $\widehat{BGD}$ est droit. ABC est un triangle rectangle isocèle donc $\widehat{DBG}$ = 45° Le triangle BDG est donc rectangle isocèle et DG = BG = x Par conséquent GF = $\sqrt{2}-2x$ et $g(x)=x\left(\sqrt{2}-2x\right)$.
B.3.a.	La lecture graphique donne deux positions possibles pour G : à 0,2 m ou à 0,51 m environ de B.
B.3.b.	La lecture graphique donne une aire maximale d'environ 0,25 m².
B.3.c.	Cette aire maximale d'environ 0,25 m² est obtenue pour une largeur d'environ 0,35 m. Si le rectangle était un carré alors le côté devrait mesurer environ 0,5 m, ce qui n'est pas le cas. DEFG n'est donc pas un carré.

EXERCICE 3. (2 points)

1.	$A_n=10^{n-1}+...+1000+100+10+1$ • Si n est pair alors n = 2p $A_{2p}=(10+1)\times10^{2p-2}+...+(10+1)\times100+11$ $A_{2p}=11\times10^{2p-2}+...+11\times10^2+11$ $A_{2p}=11\times\left(10^{2p-2}+...+10^2+1\right)$ $\left(10^{2p-2}+...+10^2+1\right)$ étant un entier, A_n est donc divisible par 11. • Si n est impair alors n = 2p + 1 $A_{2p+1}=10\times A_{2p}+1$ avec A_{2p} divisible par 11. A_{2p+1} est donc le suivant d'un multiple de 11 ; il n'est donc pas multiple de 11. Par conséquent, A_n est divisible par 11 uniquement pour des valeurs paires de n. Autre méthode : utilisation des congruences. **Critère de divisibilité par 11** *Pour déterminer si un nombre N est divisible par 11 :* • *on calcule la somme A des chiffres en position impaire ;* • *on calcule la somme B des chiffres en position paire ;* *N est divisible par 11 si et seulement si la différence A – B (ou B – A) est divisible par 11.*
2.	3 et 11 étant premiers entre eux, le nombre A_n est divisible par 33 si et seulement si A_n est divisible par 3 et 11. A_n est divisible par 11 pour les valeurs de n multiples de 2. Le nombre A_n est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3 donc pour les valeurs de n multiples de 3. Finalement, 2 et 3 étant premiers entre eux, A_n est divisible par 33 pour les valeurs de n multiples de 6.