<u>Exercice n°1 :</u>

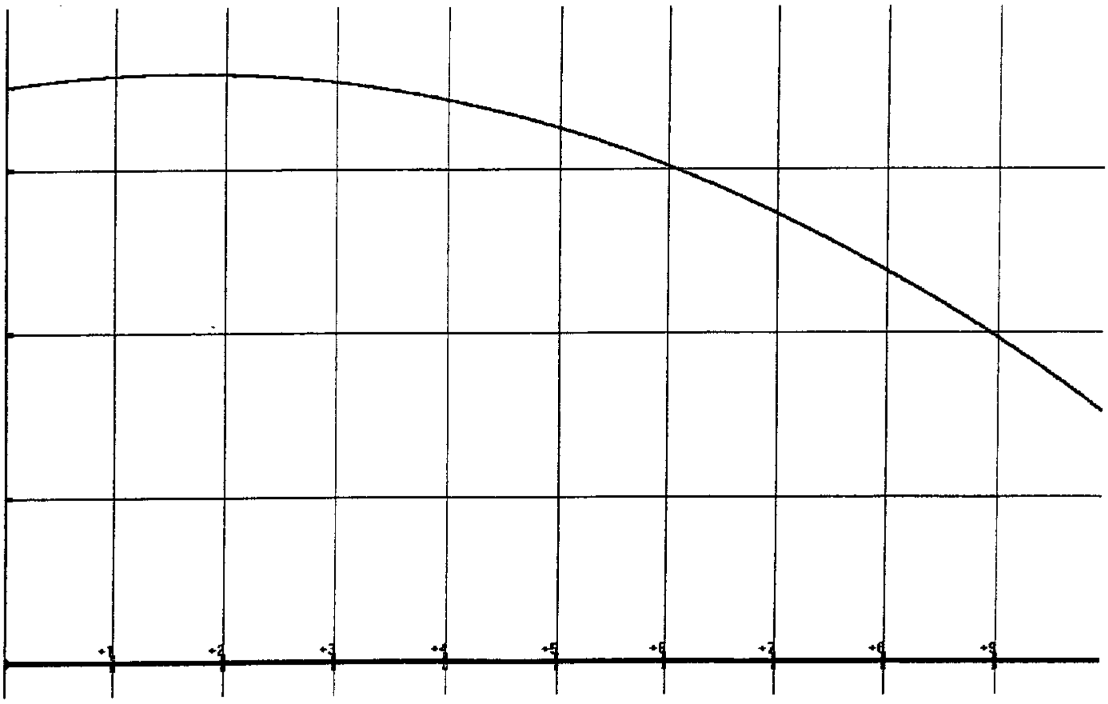
Un fabricant de carton d'invitation de luxe présente un nouveau produit de forme carrée.
Le concepteur du produit décide de donner la valeur $10 + x$ au côté du carré (en centimètres), x désignant une quantité variable.
Certaines contraintes sont imposées par le marché. Ainsi, l'aire du carton ne doit pas dépasser 4 dm^2 (dans tout l'exercice, on ne considèrera qu'une seule face du carton).
Par ailleurs, le côté du carton doit être de 10 cm au minimum.
Le fabricant considère que chaque cm^2 de surface correspond à un coût de fabrication de 0,03 €.
Par ailleurs, la fabrication d'un carton entraîne un coût supplémentaire de 0,5 € quelle que soit sa taille.

1) a) Exprimer l'aire A du carton en fonction de x. Justifier d'après l'énoncé que $x \in [0 ; 10]$.
   b) Exprimer le coût total C du carton en fonction de x.
   Vérifier que $C(x) = 0{,}03\,x^2 + 0{,}6\,x + 3{,}5$.

Le prix de vente du carton, établi d'après un échantillon de consommateurs, est de 0,7 € par cm de côté.
(ainsi, un carton de luxe dont la longueur du côté est de 20 cm sera vendu 14 €)

2) a) Exprimer le prix de vente R en fonction de x.
   b) Exprimer en fonction de x le bénéfice B réalisé. Vérifier que $B(x) = 3{,}5 + 0{,}1\,x - 0{,}03\,x^2$.

Le bénéfice réalisé en fonction de x est représenté ci-dessous sur l'intervalle [0 ; 10].
L'axe vertical est gradué de 1 € en 1 €, en partant de 0.



3) a) Déterminer graphiquement le bénéfice maximal réalisé par le fabricant sur un carton.
   Quelle est la taille idéale du carton ?

   b) Afin que le carton s'adapte à des enveloppes conçues par la même entreprise, le côté du carton est finalement fixé à 16 cm. Donner alors la valeur arrondie à l'euro du bénéfice.

   c) En réalité, des coûts de distribution et de promotion s'ajoutent aux coûts de fabrication.
   La mise en vente de 1 000 cartons entraîne des frais de 2 000 €.
   Le fabricant met sur le marché 10 000 cartons. Quel sera son profit dans le cas du b) ?

Exercice n°2 :

Madame Martin gagne 10 % de moins que son mari, mais grâce à une promotion, son salaire augmente de 10 %.
On note S le salaire de Monsieur Martin.

1) a) Exprimer en fonction de S le salaire de Madame Martin avant sa promotion.
   b) Exprimer en fonction de S le salaire de Madame Martin après sa promotion.
   c) Recopier et compléter la phrase suivante :
   « Après sa promotion, Madame Martin gagne … % de moins que son mari »

2) a) Exprimer en fonction de S le salaire du couple avant la promotion de Madame Martin.
   b) Exprimer en fonction de S le salaire du couple après la promotion de Madame Martin.

3) Déterminer le pourcentage d'augmentation du salaire du couple, arrondi à l'entier.

On donne : $\frac{1,99}{1,9} \approx 1,047$ $\frac{0,09}{1,99} \approx 0,045$ $\frac{0,09}{1,9} \approx 0,047$ $\frac{1,99}{1,09} \approx 1,826$ $\frac{1,9}{0,09} \approx 21,11$

Exercice n°3 :

On mesure les diamètres de troncs d'arbres d'une même espèce.
On étudie 400 spécimens. On obtient les résultats suivants :

Diamètre en cm	25	26	27	28	29	30
Pourcentage	10 %	15 %	30 %	35 %	5 %	5 %

1) a) Combien de spécimens ont un diamètre supérieur ou égal à 27 cm ?
   b) Parmi les spécimens qui ont un diamètre supérieur ou égal à 26 cm, quel pourcentage présente un diamètre inférieur ou égal à 27 cm ?

2) Quel est le diamètre moyen de ces troncs ?

3) Déterminer la variance, arrondie à 0,01 près, puis l'écart type, arrondi à 0,01 près, de la série statistique résumée dans le tableau.

4) a) Déterminer l'intervalle interquartile et calculer l'écart interquartile de la série statistique.
   b) Représenter le diagramme en boîtes de la série en y faisant figurer les valeurs extrêmes, et tous les quartiles.

5) Dans un autre pays, une autre étude a recensé les diamètres de 500 troncs d'arbres de la même espèce que précédemment.
Les quartiles obtenus sont : $Q_1 = 25,5$; $Q_2 = 27,5$; $Q_3 = 29$
Les spécimens sont-ils plus homogènes (moins de dispersion) ou moins homogènes (plus de dispersion) que lors de la $1^{ère}$ étude ? Justifier.

On donne :
$25\times10 + 26\times15 + 27\times30 + 28\times35 + 29\times5 + 30\times5 = 2\,725$
$25^2\times10 + 26^2\times15 + 27^2\times30 + 28^2\times35 + 29^2\times5 + 30^2\times5 = 74\,405$
$25\times10^2 + 26\times15^2 + 27\times30^2 + 28\times35^2 + 29\times5^2 + 30\times5^2 = 68\,425$
$27,25^2 = 742,5625$ $\sqrt{1,49} \approx 1,22$ $1,49^2 \approx 2,22$

Exercice n°4 :

Un athlète court le cent mètres en $t_0 = 10$ secondes.

1) Calculer sa vitesse moyenne v_0 sur 100 mètres (en mètres par seconde).

2) L'athlète, au cours d'un entretien avec un journaliste, déclare que s'il parvient à augmenter sa vitesse de 1 % alors son temps va diminuer de 1 %.
Le but de cette question est de déterminer si sa déclaration est exacte.

   a) Calculer la vitesse augmentée de 1 %, qu'on notera v_1.
   b) Calculer le temps t_1 que l'athlète mettrait alors pour parcourir les 100 mètres.
   c) La déclaration de l'athlète est-elle exacte en théorie ? Et en pratique ?

3) L'entraîneur de l'athlète estime que son coureur peut augmenter sa vitesse de 1 % tous les ans. Soit v_n la vitesse de l'athlète au bout de n années ; soit t_n le temps mis pour parcourir 100 mètres à cette vitesse v_n.

   a) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   c) Exprimer t_n en fonction de n et prouver que (t_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   d) Calculer v_5 et t_5 arrondis au centième. Commenter le résultat.

On donne : $\frac{100}{10,1} = 9,900990\ldots$ $\quad \frac{100}{9,9} = 10,101010\ldots$ $\quad (\frac{1}{1,01})^5 \approx 0,9515$ $\quad 1,01^5 \approx 1,05101$

Exercice n°5 :

Pour un emprunt de 10 000 €, remboursable en six annuités (en six versements), un commerçant s'est vu proposer par deux établissements de crédit les deux formules suivantes :

Première formule : les six annuités sont les six premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 025 € et de raison 500 €.

Seconde formule : les six annuités sont les six premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 530 € et de raison 1,15.

1) Déterminer pour la première formule la somme totale remboursée au bout de six ans.

2) Déterminer pour la seconde formule la somme totale remboursée au bout de six ans.

3) Quelle est la formule la plus avantageuse pour le commerçant ?

On donne : $1,15^6 \approx 2,313$ $\quad 1,15 + 1,15^2 + 1,15^3 + 1,15^4 + 1,15^5 \approx 7,7537$

$\frac{1,313}{0,15} \times 1\,530 \approx 13\,393$ $\quad 8,7537 \times 1\,530 \approx 13\,393$

Exercice n°6 :

Sur une autoroute, le prix du péage est de 0,075 € par kilomètre.
La société qui exploite l'autoroute propose aux usagers un abonnement aux conditions suivantes :

- achat d'une carte annuelle au coût de 66 €
- 30 % de réduction sur le prix du péage aux titulaires de la carte

Un automobiliste cherche à partir de quelle distance son intérêt est de s'abonner.

1) Si l'automobiliste parcourt 10 000 km sur l'autoroute dans l'année :

   a) Combien paiera-t-il sans abonnement ?
   b) Combien paiera-t-il avec l'abonnement ?

2) On définit deux fonctions f et g de la façon suivante :

   $f(x)$ est le coût du péage pour un non-abonné parcourant x km dans l'année.
   $g(x)$ est le coût du péage pour un abonné parcourant x km dans l'année.

   a) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

   b) Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

   c) Représenter les fonctions f et g dans un même repère. L'axe des abscisses sera gradué de 0 à 10 000 km, l'axe des ordonnées sera gradué de 0 à 750 €.

   d) Résoudre graphiquement $g(x) \leq f(x)$. Résoudre ensuite cette inéquation par le calcul.

   e) En déduire à partir de quel kilométrage annuel l'automobiliste a intérêt à s'abonner.

On donne : $\dfrac{66}{0{,}0225} \approx 2933{,}33$ $\quad \dfrac{0{,}0225}{66} \approx 0{,}00034$ $\quad 1{,}3 \times 750 = 975$ $\quad 0{,}7 \times 750 = 525$